

文章编号 1004-924X(2008)09-1722-05

广义 B 样条滤波器在表面形貌测量中的应用

张 浩¹, 袁怡宝¹, 张 峰¹, 许景波²

(1. 哈尔滨工业大学 电气与自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;
2. 哈尔滨理工大学 测量与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150040)

摘要:为了提取工件表面轮廓中线,给出了一种基于三阶广义 B 样条函数的数字平滑滤波器。由线性微分方程推导出广义 B 样条函数,并结合广义 B 样条函数和变分公式推导出由一 IIR 滤波器和间接广义 B 样条变换组成的数字平滑滤波器。给出了数字平滑滤波器的具体递归算法,并且证明了该滤波器的通用特性。最后,提取了实际工件表面中线。实验结果表明:该滤波器的截止特性比高斯滤波器的好,该算法利用普通计算机提取 11 200 点数据表面中线仅耗时 0.002 s。提出的滤波器具有可调平滑性,零相移特性,克服了传统三阶样条插值的曲率低和振荡等缺陷,其递归滤波器的具体算法简洁,效率高。

关键词:广义 B 样条函数;光滑样条滤波器;形貌测量

中图分类号:TN713.4;TB92 **文献标识码:**A

Application of generalized B spline filter to surface profile measurement

ZHANG Hao¹, YUAN Yi-bao¹, ZHANG Feng¹, XU Jing-bo²

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. College of Testing-measuring Technology and Communication Engineering, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150040, China)

Abstract: For acquiring the mean line of workpiece profile, a new kind of digital smoothing filter based on cubic generalized spline function was proposed. The generalized B spline functions were derived from the linear differential equation, and the digital smoothing filter consisting of a IIR filter and indirect generalized B spline transformation was deduced by combination with generalized B spline functions and variational principles. Then, the recursive algorithm of the filter was presented concretely, and the filter's universal property was testified. Finally, this filter process was applied to a workpiece to acquire mean line. The experimental results indicate that the filter has a better cut-off property than that of Gauss filter, and total calculation only requires 0.002 s for 11 200 data points by PC. The filter has advantages in adjustable smoothing property and zero phase transmission, which can overcome the drawbacks of low curvature and serious oscillations of traditional cubic spline interpolation. The recursive algorithm is efficient and simple.

Key words: generalized B spline function; smoothing spline filter; profile measurement

收稿日期:2008-01-21;修订日期:2008-02-28.

基金项目:教育部留学回国人员科研基金资助项目(No. AEBQ24403704)

1 引言

样条函数具有很多特性,如局部正支撑性,光滑性,最小均方误差,这些特性使样条函数广泛应用于工程的各个领域。1978年,Liou^[1]和Hou^[2]等人将三阶样条插值作为滤波器,应用于数字信号处理;1996年,Michael Kristek将自然立方样条应用于表面形貌测量^[3]。这几种方法是通过解方程法的方式计算,由于未知数多,矩阵和乘法多,算法和效率都不高。样条平滑滤波器由Unser于上世纪90年代提出,主要应用于图像处理和数字滤波,该滤波器具有数据逼近和保持滤波器平滑两者折中特性,所以克服了传统三阶样条插值的曲率低和振荡的缺陷^[4]。

样条滤波器的零相移,鲁棒性强等特点,使其成为表面形貌测量应用的热点,ISO/TC213正在讨论将样条滤波器加入国际标准。基于三阶广义B样条的平滑滤波器具有较强的通用性,将其应用于形貌测量,获取中线,在满足精度的情况下,可以简化样条函数的计算,省去繁琐的矩阵计算,可大大提高效率。

2 广义B样条

广义B样条是由线性方程微分方程推导出一组B样条函数。它的定义如下^[5]:

$$\beta_m^{nr}(x) = L \sum_{j=0}^{n+1} W_j g_m^{nr}(x-x_j)U(x-x_j), \quad (1)$$

式中: L 是归一常数; $g_m^{nr}(x)$ 是广义B样条母函数(段间); n 是样条阶次; r 为样条类型; m 是步长(以下设为单位长1); $U(x)$ 是单位阶跃函数; W_j 是第 j 段基函数参数。为了方便,母函数表示为 $g(x)$ 。

利用线性系统理论推导广义B样条母函数,设线性微分方程为:

$$(D^{n+1} + b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_0)g = 0, \quad (2)$$

式中: b_n 是 $g(x)$ 第 n 阶微分式的系数。

由于 $g(x)$ 必须满足 $n-1$ 阶可微连续性,所以必有:

$$g(0) = Dg(0) = D^2g(0) = \dots = D^{(n-1)}g(0) = 0.$$

同时为了不失一般性,设 $D^{(n)}g(0) = 1$ 。对

式(2)进行拉普拉斯变换,得到

$$G(s) = \frac{1}{s^{n+1} + b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (3)$$

$G(s)$ 有 $n-1$ 个极点,由于 $g(x)$ 是实数,所以 $G(s)$ 的极点关于实轴对称;同时为了使广义B样条中心对称,设 $g(x) = |g(-x)|$,即 $G(s)$ 极点关于虚轴对称,故 $G(s)$ 的极点具有四象限对称的特性。

这里只讨论等间距情况, n 阶广义B样条具有B样条的卷积性质,

$$\beta_1^{nr}(x) = \beta_1^p * \beta_1^q, \quad (4)$$

式中 $n = p + q + 1, p \geq 0, q \geq 0$ 。

由式(3),第一类型零阶广义B样条母函数的拉氏变换为 $G(s) = (s + \alpha)^{-1}$,所以 $g^{01} = \exp(-\alpha x)$ 。由此,第一类型零阶广义B样条函数为:

$$\beta^{01}(x) = \frac{\alpha}{(1 - e^{-\alpha})} [e^{-\alpha x} U(x) - e^{-\alpha} e^{-\alpha(x-1)} U(x-1)],$$

式中: α 是尺度因子,可调节样条函数幅值。当 α 趋近于零时,该式简化为矩形脉冲,即零阶B样条函数。

由以上讨论的极点性质,卷积性质和已经求出的零阶广义B样条,可以推导出 n 阶不同类型的广义B样条,这里仅以三阶广义B样条为例讨论推导过程。

由极点性质可确定三阶广义B样条 $G(s)$ 9种可能的极点形式,它们分别为:

- (a) $s^4 = 0$;
- (b) $s^2 = 0, s = \pm \alpha$;
- (c) $s^2 = 0, s = \pm j\alpha$;
- (d) $(s^2 - \alpha^2)^2 = 0$;
- (e) $s = \pm \alpha_1, s = \pm \alpha_2$;
- (f) $(s^2 + \alpha^2)^2 = 0$;
- (g) $s = \pm j\alpha_1, s = \pm j\alpha_2$;
- (h) $s = \pm \alpha_1, s = \pm j\alpha_2$;
- (i) $s = \alpha_2 \pm j\alpha_1, s = -\alpha_2 \pm j\alpha_1$ 。

可以看出(a)种情况,即 β^{31} ,就是三阶B样条函数。而针对(c)种情况,也可称为第三类型三阶广义B样条^[6],如图1所示。

根据卷积性质 $B_1^{33}(s) = B_1^{11}(s) B_1^{13}(s)$, B^{3r} 为 β^{3r} 的拉氏变换,可得:

$$B_1^{33}(s) = (2(1 - \cos \alpha)(s^2 + \alpha^2)s^2)^{-1} \alpha^2 [1 - 2(1 + \cos \alpha) \times e^{-s} + 2(1 + 2\cos \alpha) e^{-2s} - 2(1 + \cos \alpha) e^{-3s} + e^{-4s}], \quad (5)$$

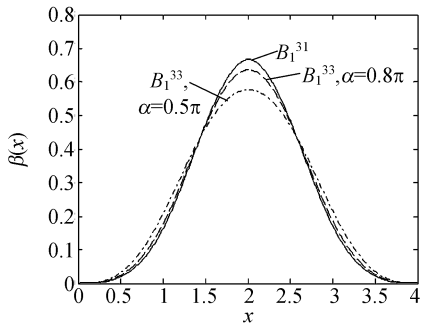


图 1 归一化的三阶广义 B 样条

Fig. 1 Normalized cubic generalized B spline

广义 B 样条函数还具有以下性质：

$$\frac{\partial \beta_1^{nr}(x)}{\partial x} = \beta_1^{(n-1)r}(x + \frac{1}{2}) - \beta_1^{(n-1)r}(x - \frac{1}{2}) . \quad (6)$$

3 广义 B 样条光滑滤波器

对一给定区间 $[a, b]$ 做分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, 由广义 B 样条基函数的线性组合可以构造一系列插值函数, 对分划区间上的任意函数进行插值逼近。可得：

$$s^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k) \cdot \beta_1^{nr}(x - k) , \quad (7)$$

式中： $s^n(x)$ 为插值函数, $C(k)$ 为插值系数。上述计算过程可以看作是一种滤波过程。

对式(7)求二阶导数, 并将式(6)带入式(7)可得：

$$\frac{\partial^2 s^n(x)}{\partial^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d^{(2)} * C(k) \beta_1^{(n-2)r}(x - k) , \quad (8)$$

$d^{(2)}(k) = \delta_0(k+1) - 2\delta_0(k) + \delta_0(k-1)$ 为二阶差分算子, 且 Z 变换 $D^{(2)}(z) = (z - 2 + z^{-1})$ 。

设 b_1^{3r} 为离散形式的三阶广义 B 样条, 其 Z 域变换为 $B_1^{3r}(z)$ 。根据参考文献[7-8], 由 Unser 提出的设计方法, 各种类型三阶广义 B 样条间接 (Indirect) 滤波器传递函数可写为：

$$B_1^{3r}(z) = \frac{z + l_2 + z^{-1}}{l_1}$$

根据平滑滤波变分公式：

$$\epsilon_s^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - s(x_i))^2 + \mu \int_{x_1}^{x_n} \left(\frac{\partial^2 s(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \epsilon_a^2 + \mu \epsilon_r^2 , \quad (9)$$

式中, y_i 是测量值; $s(x)$ 为滤波中线; ϵ_a 用来描述逼近程度; ϵ_r 是弯曲能量, 用以描述平滑程度; μ

为一正值参数, 该参数的选择建立了对数据合理逼近和保持滤波器足够平滑两者之间的折中关系, 实现了最小曲率和最佳逼近特性, 将式(8)带入式(9), 得：

$$\epsilon_r^2 = \int_{x_1}^{x_n} \left(\sum_{i=1}^n d^{(2)} * C(i) \beta^{1r}(x - i) \right) \times \left(\sum_{j=1}^n d^{(2)} * C(i) \beta^{1r}(x - j) \right) dx .$$

根据样条卷积特性, 上式可以简化为：

$$\epsilon_r^2 = \sum_{i=1}^n d^{(2)} * C(i) \sum_{k=i-1}^{i-n} d^{(2)} * C(i - k) * b_1^{3r}(i)$$

所以

$$\epsilon_s^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b_1^{3r}(i) * C(i)))^2 + \mu \sum_{i=1}^n (d^{(2)} * C(i)) \times (d^{(2)} * C(i) * b_1^{3r}(i)) \quad (10)$$

要使 ϵ_s^2 最小, 可以通过建立式(10)对导数为零的求导方程, 解得 $C(i)$, 也即求得相应的平滑样条系数。可得：

$$B_1^{3r}(z^{-1})Y(z) = B_1^{3r}(z^{-1})B_1^{3r}(z)C(z) + \mu D^{(2)}(z) \times D^{(2)}(z^{-1})B_1^{3r}(z^{-1})C(z) , \quad (11)$$

最后可得到：

$$C(z) = p_\mu^{3r}(z)Y(z) = \frac{1}{B_1^{3r}(z) + \mu(z - 2 + z^{-1})^2} Y(z) , \quad (12)$$

从式(12)可以看出平滑样条系数可以由一滤波器对输入信号进行数字滤波得到, 这一滤波器 $p_\mu^{3r}(z)$ 实际上是一 IIR 滤波器。得到 $C(z)$ 后, 再经过间接广义 B 样条变换就可以得到表面轮廓中线 $s(x)$, 整个过程可由图 2 表示。

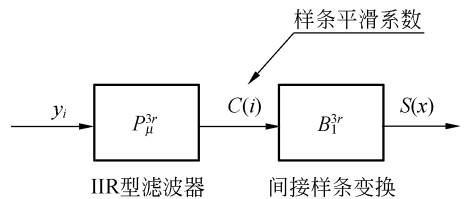


图 2 平滑滤波器

Fig. 2 Smoothing filter

上述过程构成了一个等效的数字滤波器：

$$H_\mu^{3r}(z) = B_1^{3r}(z) p_\mu^{3r}(z) = \frac{B_1^{3r}(z)}{B_1^{3r}(z) + \mu(z - 2 + z^{-1})^2} . \quad (13)$$

这是一个三阶广义 B 样条平滑滤波器,其频率响应为:

$$H_{\mu}^{3r}(n) = \frac{l_2 + 2\cos(2\pi/n)}{l_2 + 2\cos(2\pi/n) + 4\mu l_1 (\cos(2\pi/n) - 1)^2}$$

它实质上是一个低通滤波器,滤波器衰减强弱受 μ 控制。

4 表面中线的提取和算法

根据表面中线提取滤波要求在截止波长 λ_c 处,滤波器幅度传输特性应为 50%,所以 μ 的计算关系如下^[9]:

$$\frac{l_2 + 2\cos(2\pi/N_c)}{l_2 + 2\cos(2\pi/N_c) + 4\mu l_1 (\cos(2\pi/N_c) - 1)^2} = \frac{1}{2}$$

设 $N_c = 1\ 600$ 。

三阶广义 B 样条平滑滤波器与高斯滤波器的幅度传输特性如图 3:

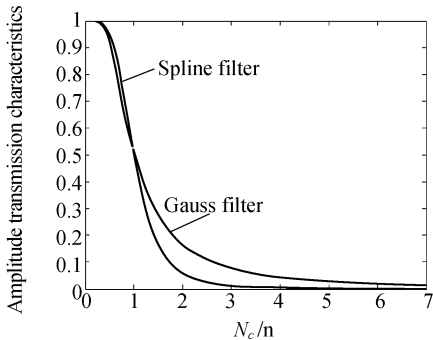


图 3 三阶广义 B 样条平滑滤波器与高斯滤波器幅度传输特性

Fig. 3 Amplitude transmission characteristics of cubic generalized B spline smoothing filter and Gauss filter

由图 3 可知,三阶广义样条平滑滤波器具有比高斯滤波器更好的幅频特性,截止边沿更陡峭,更光滑。

由式(13),滤波器 H_{μ}^{3r} 由两部分构成, $B_1^{3r}(z)$ 和 $p_{\mu}^{3r}(z)$ 。

$p_{\mu}^{3r}(z) = \frac{1}{B_1^{3r}(z) + \mu(z-2+z^{-1})^2}$ 可以分解成两个互补因式之积:

$$p_{\mu}^{3r}(z) = p'(z)p'(z^{-1})$$

并且 $p'(z) = \frac{1 - 2\rho\cos\omega + \rho^2}{1 - 2\rho\cos\omega z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$

式中: ρ 和 ω 是式(13)的特征多项式两个最小共轭复根的幅值和相角。为了方便表述,可建立下

面的关系式:

$$\begin{cases} A = 1 - 2\rho\cos\omega + \rho^2 \\ b_1 = 2\rho\cos\omega \\ b_2 = -\rho^2 \end{cases}$$

则 $p_{\mu}^{3r}(z) = \frac{A}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} \cdot \frac{A}{1 - b_1 z - b_2 z^2}$

整个滤波器 $H_{\mu}^{3r}(z)$ 计算过程可以用以下 3 步实现,设 $wz(k)$ 为滤波器中间序列:

(1) $wz(k) = Ay(k) + b_1 wz(k-1) + b_2 wz(k-2) \quad k=3 \dots M$

(2) $C(M-k+1) = Awz(M-k+1) + b_1 C(M-k+2) + b_2 C(M-k+3) \quad k=3, \dots, M$

(3) $s(k) = \frac{1}{6}C(k-1) + \frac{2}{3}C(k) + \frac{1}{6}C(k+1) \quad k=4, \dots, M-3$

M 为总的采样点数。这相当于一级零相移滤波器和一级加权平均滤波的串联,整个算法只需要两级循环就实现了,结构简单,易于实现,计算效率高。

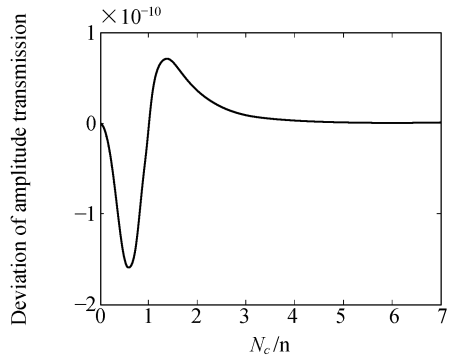


图 4 幅度传输特性偏差

Fig. 4 Deviation of amplitude transmission characteristics

实际应用过程中, l_1 和 l_2 的值可以任意选择,只需满足条件 $l_1 > 0, l_2 > 0$ 并且是实数即可。得到的广义样条光滑滤波器幅频特性相差不大,随意赋值 $l_1 = 5$ 和 $l_2 = 7.5$,得到的样条滤波器的幅频特性与 B_1^{3r} 偏差不大,如图 4 所示,偏差在 10^{-10} 左右,可以忽略。这个性质称为广义 B 样条的通用性,它由广义 B 样条函数的极点遍历性质决定(α_1 和 α_2 值任意性),可极大地方便滤波器的使用。

5 实 验

对一个实际工件表面进行测量,选取截止波

长 0.8 mm, 采样间距 $0.5 \mu\text{m}$, 测量长度为 $7\lambda_c$, 评定长度 $5\lambda_c$, 共测得 11 200 个数据, 其原始轮廓如图 5 所示。采用上述的三阶广义 B 样条平滑滤波器, 得到的滤波中线如图 5 所示, 在普通计算机上完成上述算法耗时 0.002 s。

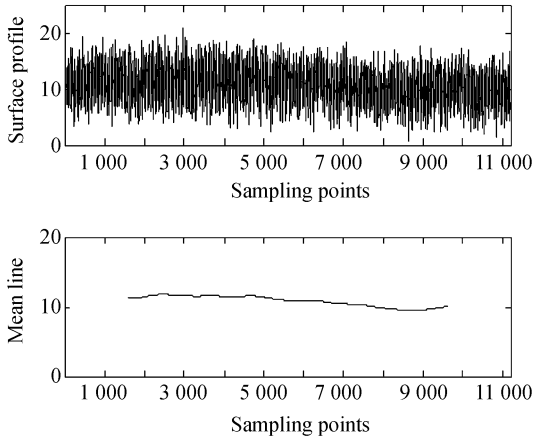


图 5 工件表面轮廓、滤波中线

Fig. 5 Surface profile and mean line of workpiece

6 结 论

本文根据表面轮廓测量的需要, 提出了基于三阶广义 B 样条光滑滤波器算法。文中阐述了该滤波器的通用性, 改进了三阶样条插值的解方程算法, 方法简单, 效率高, 提取 11 200 点数据表面中线仅耗时 0.002 s, 极大地方便了样条滤波器的使用, 克服了传统三阶样条插值的曲率低和振荡的缺陷, 并且得到优于高斯滤波器的截止特性。对于其他方向的应用, 如图像处理, 边缘检测的方向, 也有很好的应用空间。当然由于该滤波器方法仍然使用卷积和差分运算, 所以不可避免会带来边沿效应(end effect), 但只要数据量充足, 就可减小影响。

参考文献:

- [1] LIOU M L. Spline fit made easy[J]. *IEEE Trans. Comput.*, 1976, C-15: 522-527.
- [2] HOU H S, ANDREWS H C. Cubic splines for image interpolation and digital filtering[J]. *IEEE Trans.*, 1978, 26(6): 508-517.
- [3] KRYSZEK M. Form filtering by splines[J]. *Measurement*, 1996, 18(1): 9-15.
- [4] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. Recursive regularization Filters: Design, properties, and applications[J]. *IEEE. Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1991, 13(3): 272-277.
- [5] PANDA R, RATH G, CHATTERJI B N. Generalized B-spline signal processing[J]. *Signal Processing*, 1996, 55: 1-14.
- [6] PANDA R, CHATTERJI B N. Least squares generalized B-spline signal and image processing[J]. *Signal Processing*, 2001, 81: 2005-2017.
- [7] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. B-spline signal processing: Part I -Theory[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(2): 821-832.
- [8] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. B-spline signal processing: Part II -Efficient design and applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(2): 834-848.

作者简介:张 浩(1979—),男,黑龙江齐齐哈尔人,博士生研究生,主要从事表面形貌测量,数字信号处理,图像处理等方面的研究。E-mail: zhanghaowo79@163.com

袁怡宝(1964—),男,江苏启东人,教授,主要从事表面计量学、微形状计量学、纳米计量学及其应用,自动化测试技术与仪器,数字信号处理,光、机、电传感器技术等方面的研究。E-mail: yibaoyuan2008@yahoo.com.cn